Die Kolmogorovschen Axiome

Der deutsche Mathematiker *David Hilbert* (1862–1943) hat anfangs des 20. Jahrhunderts das Desiderat formuliert, wonach mathematische Theorien dem Vorbild der Geometrie zu entsprechen, also ihre Theoreme auf ein *Axiomensystem* abzustützen hätten, d.h. auf ein System von Grundsätzen, die *selbst nicht wieder zu beweisen sind*.

Dabei soll ein Axiomensystems folgende Eigenschaften erfüllen.

- *Konsistenz* oder *Widerspruchsfreiheit* (d.h. aus dem Axiomensystem sollen sich keine Widersprüche herleiten lassen),
- *Unabhängigkeit* (d.h. keines der Axiome lässt sich aus den übrigen herleiten).

Hilbert verlangte auch folgende weitere Anforderung:

- *Vollständigkeit* (d.h. für jede Aussage der Theorie: es lässt sich entweder die Aussage selbst oder ihre Negation aus den Axiomen herleiten).

Heute weiss man allerdings, dass diese nicht zu erreichen ist.

Erst 1933 wurde das Desiderat Hilberts erreicht: der russische Mathematiker *Andrej Nikolaevič Kolmogorov* (1903–1987) entwarf das heute gültige Axiomensystem der Wahrscheinlichkeitstheorie und publiziert es.

Die Kolmogorovschen Axiome lauten (in etwas abgeschwächter Form) wie folgt.

Axiom 1. Jedem Ereignis E eines Zufallsexperimentes ist eine Zahl $P(E)$, die sog. *Wahrscheinlichkeit* von E, zugeordnet mit der Eigenschaft, dass

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

Axiom 2. Das *sichere* Ereignis S hat die Wahrscheinlichkeit 1:

$$P(S) = 1.$$

Axiom 3. Für zwei *unvereinbare* Ereignisse E und F (d.h. mit $E \cap F = \varnothing$) gilt:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F).$$

Folgerungen aus den Axiomen von Kolmogorov.

(1) Die Wahrscheinlichkeit des *unmöglichen* Ereignisses $\varnothing$ ist 0.

Beweis:

(2) Die Summe der Wahrscheinlichkeiten eines Ereignisses E und seines *Gegenereignisses* $\overline{E} = S \setminus E$ ist 1.

Beweis:

Bemerkung. Oft wird diese Tatsache in der Form $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ verwendet.

(3) Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse ist 1.

Beweis:

Folgender Umstand ist äusserst bemerkenswert. Die Kolmogorovschen Axiome, welche Aussagen über Wahrscheinlichkeiten sind, lassen sich ebenso gut als Aussagen über Flächeninhalte von Figuren interpretieren. Axiom 2 legt fest, dass der Flächeninhalt einer Grundfigur S den Flächeninhalt 1 haben soll. Axiom 1 sagt aus, dass der Flächeninhalt jeder Figur E, die in der Figur S enthalten ist, einen Flächeninhalt hat, der höchstens gleich dem Flächeninhalt von S – also 1 – ist (und naturgemäss nicht negativ). Axiom 3 schliesslich sagt aus, dass der Gesamtflächeninhalt zweier Teilfiguren E und F von S, die sich nicht überschneiden, so gross ist wie die Summe der Flächeninhalte der einzelnen Teilfiguren.

Die Flächeninterpretation führt umstandslos auf den

Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F).$$